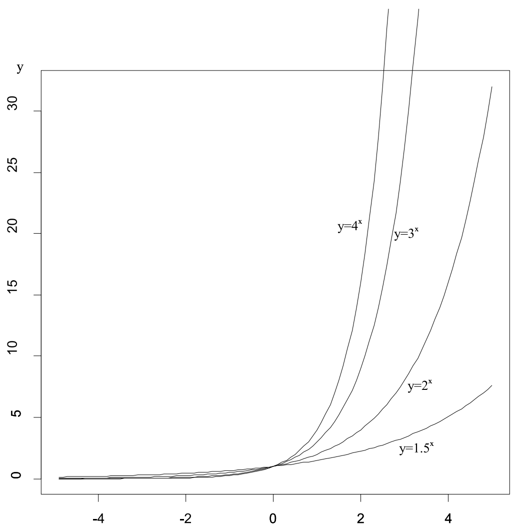
指数関数と対数関数について

中澤　港

May 7th, 2003

指数関数とは何か

a を定数として，$y = a^x$ という形の関数を考えると，a の値によって下図のようなさまざまな形の関係が描かれる[*1]。これらの関数を総称して a を底とする指数関数という。



次に，これらの関数に引いた接線の傾きがどれくらいになるかを考えよう。そうはいっても，これはなかなか難しい。傾きというのは変化率のことだから，ひとつの考え方として，x が少しだけ増えたときに y がどれだけ増えるかを求め，それを x が増えた量で割ってみるというアイディアはどうだろうか。x が増える「少しだけ」を限りなくゼロに近づけたときに，その x の点における傾きが得られると考えるのである。下図のよう

[*1] この図は，R によって

```
> x<-c(1:100)/10-5
> plot(x,4^x,type="l")
> points(x,3^x,type="l")
> points(x,2^x,type="l")
> points(x,1.5^x,type="l")
```

として作成した図に OpenOffice.org の draw によって文字を書き入れて作成した。

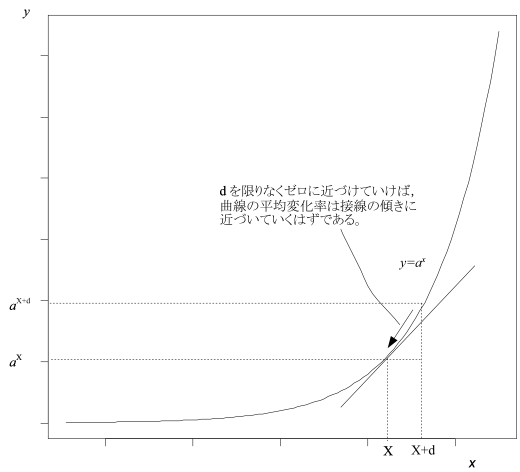
に x が X から $X+d$ に増えたときの y の増加量は $a^{X+d}-a^X$ で得られるから，平均変化率は，

$$\frac{a^{X+d}-a^X}{d}$$

となる。ここで，a^{X+d} は $a^X \cdot a^d$ だから（言葉で言い換えると，a を $X+d$ 回掛け合わせることは，a を X 回掛け合わせたものに a を d 回掛け合わせたものを掛けることと同値だから），分子は $a^X(a^d-1)$ と書くことができる。ここで d をゼロに限りなく近づけたときに得られる値は，

$$\lim_{d\to 0}\frac{a^X(a^d-1)}{d}$$

と書くことができる。この量を，指数関数 $y=a^x$ の X における微分と呼ぶ。



この式を良く見ると，分子に y の値そのものがあるので，a を底とする指数関数の微分は，それ自身の値に何らかの係数を掛けたものといえる。仮に，この係数が 1 になるような a の値が存在すれば，その関数の微分は常に関数値そのものになる。このときの a を e と書く。つまり，

$$1=\lim_{d\to 0}\frac{(e^d-1)}{d}$$

より，

$$e=\lim_{d\to 0}(1+d)^{1/d}$$

となり，これが e の定義である。数値計算すると，2.71828... という無限に続く繰り返しのない小数（つまり分数の形にできない数＝無理数）になる。

対数関数とは何か

簡単にいえば，指数関数の逆関数が対数関数である。つまり，$y=a^x$ という関係があるとき $x=\log_a y$ と書くことにすると，$y=\log_a x$ を a を底とする対数関数と呼ぶ。$a=e$ である対数を自然対数と呼び（このとき，とくに $y=\ln x$ と書くこともある），$a=10$ である対数を常用対数と呼ぶ（常用対数をとると，$x=1,10,100,1000,...$ に対して $y=0,1,2,3,...$ となるので何桁の数かを見るのに便利である）。