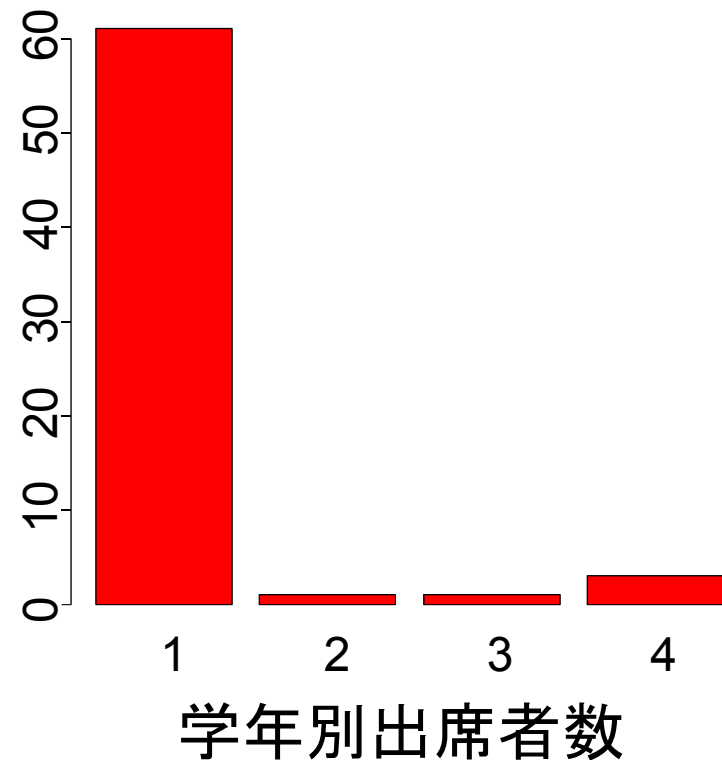
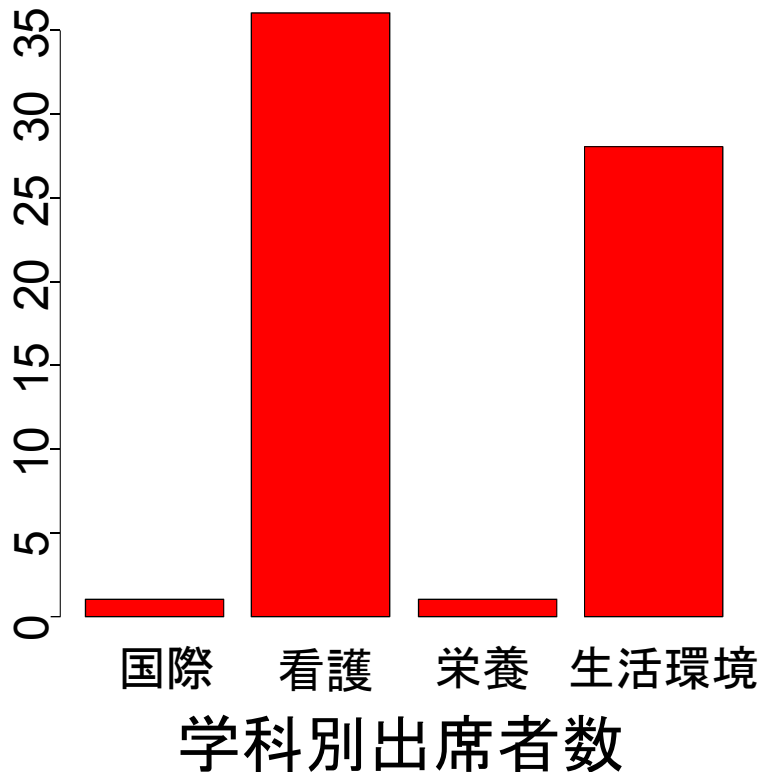


# 統計学第2回「確率と確率分布」

- <http://phi.ypu.jp/statlib/12-2003.pdf>
- 統計学＝「不確実性を考慮した論理的推論」であった。
- 不確実性＝確率的？
- 確率とは？
- あらゆる統計的な考え方の基礎



# どういう現象が確率的？

- サイコロを振ったときの目：振ってみるまでは1から6のどれが出るかはわからない。どの目ができる可能性も等しいから。
- 天気予報：「明日の天気予報は晴れ」といっても「必ず晴れる」とは限らない。「曇ったり雨が降ったりする可能性も少しはあるが、晴れる可能性が高い」ことを意味する。
- 喫煙と肺がんの関係：「タバコを吸うと肺がんになる」というのは、タバコを吸った人と吸わなかった人を比べて、肺がんになった人の割合が吸った人の方で高い、という関係を示す。タバコを吸っても肺がんにならない人もいるし、吸わなくても肺がんになる人もいる。
- 実は自然界のほぼすべての現象は確率的。

# 統計的事象

- こういう「不確かさ」に潜む法則性（長期間繰り返し観察したり，大集団で観察すると見られる）を考える学問を確率論と呼ぶ。
- この種の法則性をもつ現象を，「統計的事象」と呼ぶ。
- 統計的事象の不確かさの度合いを示すのに便利なモノサシが「確率」

# 標本空間

- 統計的事象を捉えるには、「どんなことが起こりうるのか」という範囲を定めることが必要。
- 現象は一般に多面的で様々な観察方法がある。以下3点によって統計的現象を捉えた、記号化された結果の集合のことを「標本空間」と呼ぶ。
  - 観察を行う面を特定する
  - 起こりうる結果の範囲を規定する
  - その範囲内の各結果に記号を対応させる
- 個々の結果の起こりうる可能性を示す数値(これを「確率」という)を考える。一般には「どの結果も同程度に起こる」と考える。各結果に対応付けられた確率は0から1までの数値であり、各確率の値の総和は1にならねばならない。
- サイコロの目では、標本空間は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

# 事象の確率

- 問題は、個々の結果の可能性よりも、いくつかの結果が複合された集合(これを「事象」という)の起こる可能性がどのくらいか、ということ。つまり、事象とは、「標本空間の部分集合」である。
- サイコロの例では、「丁(目が偶数)」とか「目が5以上」とか「目が1」とかということが事象である。
- ある事象の確率は、その事象に含まれる各結果の生起確率の和である。従って、各結果の生起確率が等しい場合は、その事象に含まれる結果の場合の数をすべての場合の数で割ると、その事象の確率になる。サイコロの例では、「目が5以上」という事象の確率は、 $2/6=0.333\dots$ である。

# 余事象・和事象・積事象・排反事象

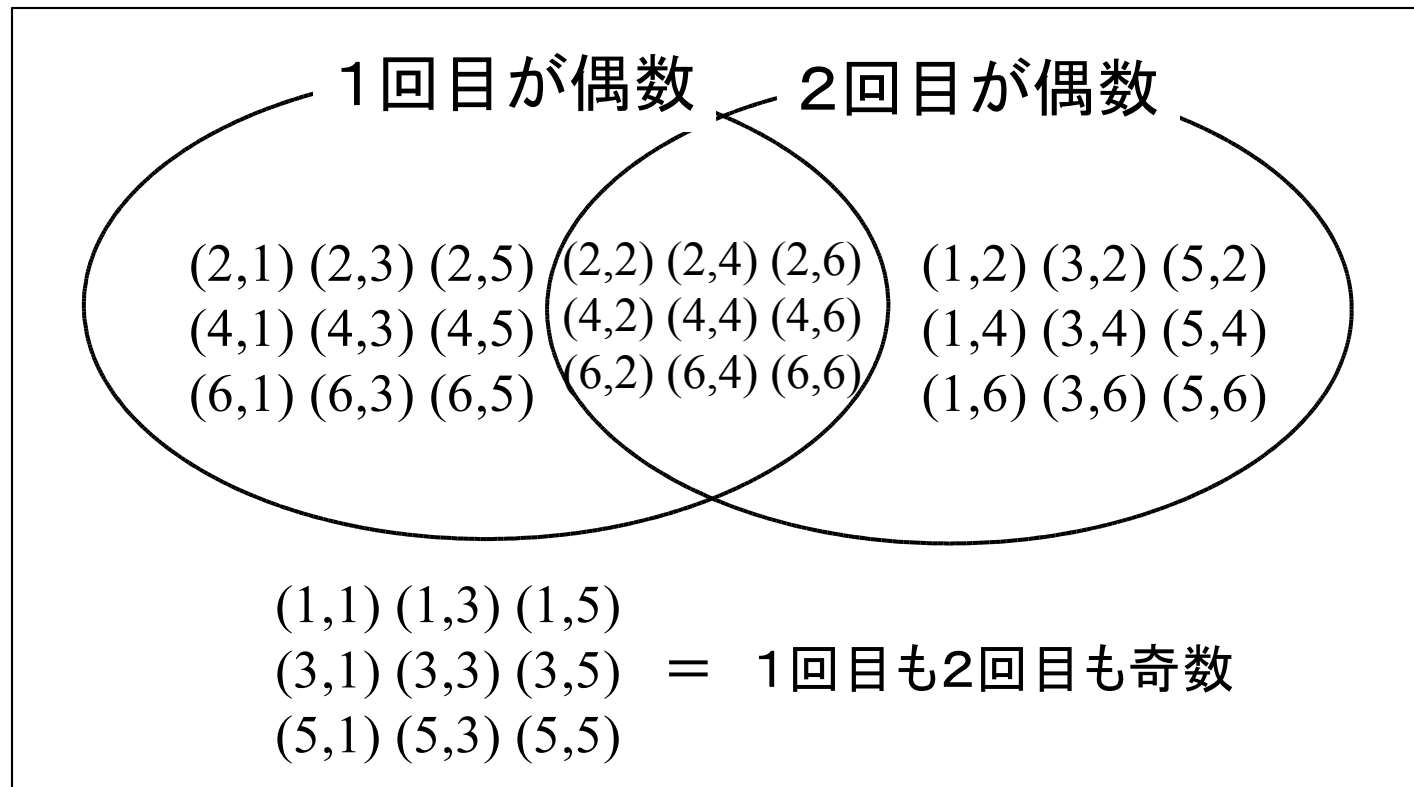
- 起こりうるすべての結果の集合を「全事象」という。つまり，全事象は標本空間に等しい。
- 決して起こらない事象を「空事象」といい，空集合  $\varnothing$  で表す。
- 事象  $E$  に対して， $E$  が起こらないという事象を  $E$  の「余事象」という。サイコロの例では，「目が偶数」という事象の余事象は「目が奇数」である。 $E$  の余事象を  $\bar{E}$  と書く。
- 事象  $E$  と  $F$  の少なくとも一方が起こるという事象を， $E$  と  $F$  の「和事象」といい， $E \cup F$  で表す。
- 事象  $E$  と  $F$  の両方が起こるという事象を， $E$  と  $F$  の「積事象」といい， $E \cap F$  で表す。
- 事象  $E$  が起これば  $F$  は決して起こらないとき， $E$  と  $F$  は「排反事象」とあるという。 $E$  と  $F$  が排反事象なら， $E \cap F = \varnothing$  である。

# 事象の確率を表す記号

- 事象  $E$  が起こる確率を  $\text{Pr}(E)$  と書く。
- サイコロで考えると、1回振ったとき「偶数の目が出る」という事象  $E$  が起こる確率  $\text{Pr}(E)$  は、 $\{2,4,6\}$  の場合の数3を、 $\{1,2,3,4,5,6\}$  の場合の数6で割った値なので  $\text{Pr}(E)=0.5$  。

# 2回振って「少なくとも1回は偶数の目」の確率は？

- $0.5+0.5=1.0$  ではないのは自明。
- 偶数の目が1回目に出る事象  $E_1$  と2回目に出る事象  $E_2$  とは排反ではない
- 集合で考えれば,  $\Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cap E_2)$  は自明。この式を「加法法則」と呼ぶ。
- 「2回とも奇数」の余事象なので  $1 - \Pr(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})$
- 事象  $E$  と事象  $F$  が排反なら,  $\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F)$  という「加法定理」が成立。





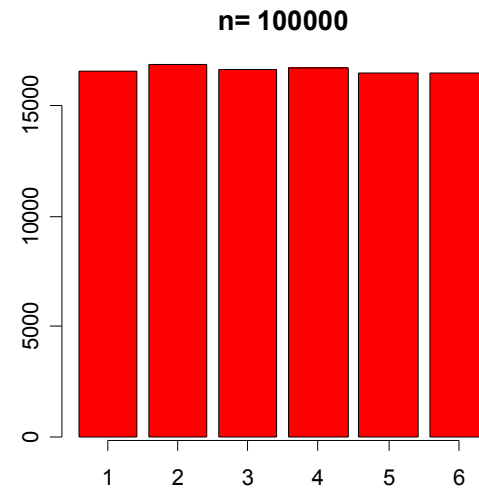
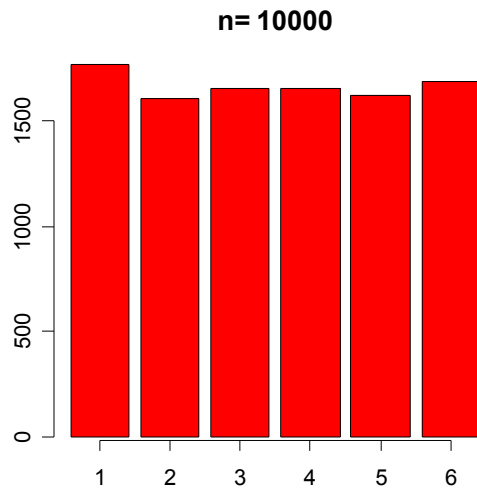
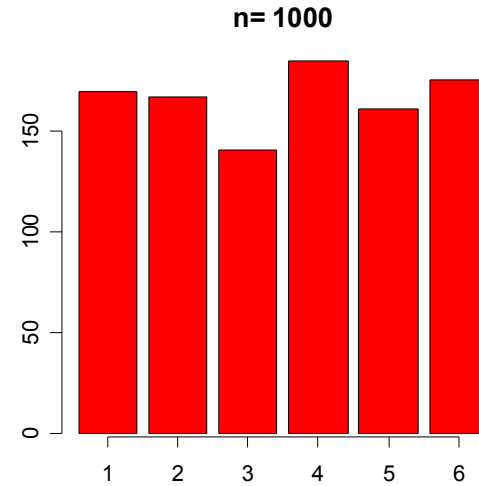
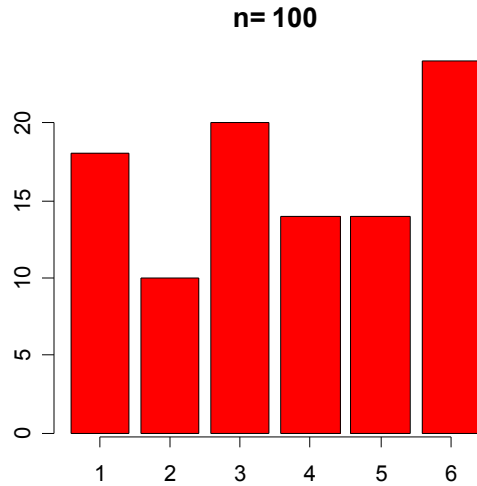
# 事象の独立性と乗法定理

- 事象 E が起こっているときに事象 F が起こる確率を、E が起こったときの F の「条件付き確率」といい、 $\Pr(F|E)$  と書く。
- $\Pr(F|E)=\Pr(F\cap E)/\Pr(E)$  である。
- 事象 E と事象 F が互いに無関係（独立）なら、F の条件付き確率  $\Pr(F|E)$  は、 $\Pr(F)$  と一致する。逆にいえば、 $\Pr(F)=\Pr(F|E)$  のときに事象 E と事象 F は互いに独立であるという。独立でないとき「従属である」という。
- 上記2つの式から、事象 E と事象 F が独立なら、 $\Pr(F\cap E)=\Pr(F)\times\Pr(E)$  “乗法定理”が成立。

# 確率の4つの定義

- 操作的接近＝統計的定義: 数多く試したときの相対度数の極限。例えば, 事象  $E$  が起こる確率  $\Pr(E)$  は,  $N$  回試したときに  $N_1$  回事象  $E$  が起こるとして,  $N$  を無限大にしたときに  $N_1/N$  が漸近する値である。
- 対称的確率: サイコロの場合, 6通りの目の出る確率はどれも等しくなければならず, その和は1でなくてはならないので, 例えば1の目が出る確率は  $1/6$  となる。限定的かつ循環論法。
- 公理的客観確率: 標本空間の各要素を  $e_i$  として,  $\Pr(e_i) \geq 0$  かつ  $\Pr(e_1) + \Pr(e_2) + \dots + \Pr(e_N) = 1$  かつ  $\Pr(E) = \sum \Pr(e_i)$  を公理とする。厳密(正確にはもっと長い説明が必要。テキスト参照)。
- 主観確率: ビッグバンとか超新星の爆発といった, 観念的にも二度と繰り返すことのできない事象についての「見込み」を扱う。決定理論において重要。

# 大数の法則 (操作的接近の根拠)



# 確率変数と期待値

- 例えば、スロットマシンにコインを入れると、ごくたまに、投入金額の何十倍ものコインが出てくる。
- マシン利用者全員に返ってくる賞金の合計を利用回数で割った値が、1回に期待される賞金額である。これを賭け金で割った値を「賞金還元率」と呼ぶ。すべての賭け事で胴元が儲かるようになっているのは、賞金還元率が100%未満だからである。宝くじでは40%、競馬では75%と言われる。
- 一般に、賞金額が  $x_1, x_2, x_3, \dots$  で、その賞金が得られる確率が  $p_1, p_2, p_3, \dots$  のように設定されたスロットマシンの期待賞金額  $M$  は、 $M = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots$  で与えられる。
- このスロットマシンのようなものを確率変数といい、期待賞金を一般に期待値と呼ぶ。

# 分散

- 期待賞金が同じでも、値動きの幅が小さいと一喜一憂の程度が小さく、逆に幅が大きいと滅多に当たらないが当たったときの喜びは大きくなる。つまり、ギャンブル性は、値動きの幅と、チャンスの大きさに依存している。
- 各賞金がどれくらい期待賞金から隔たりがあり、それを獲得できる可能性がどれくらいあるのかを見積もれば、ギャンブル性が表せる。
- $V = (\text{マシンのギャンブル性}) = \Sigma (\text{期待値からの隔たり}) \times (\text{可能性})$  という値が定義できる。この  $V$  を「分散」と呼ぶ。なお、各賞金額  $x$  と期待値  $M$  の隔たりは、普通、差の平方値  $D = (x - M)^2$  で表す。

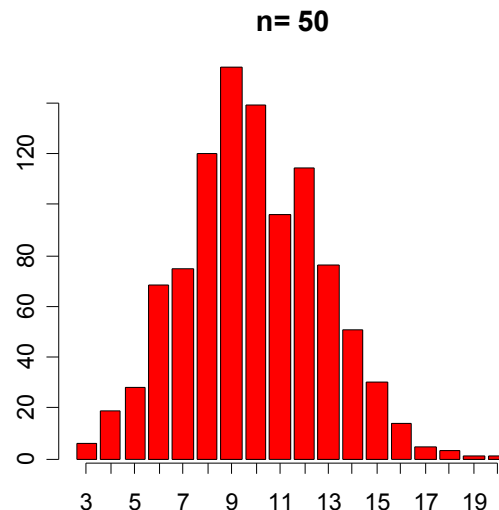
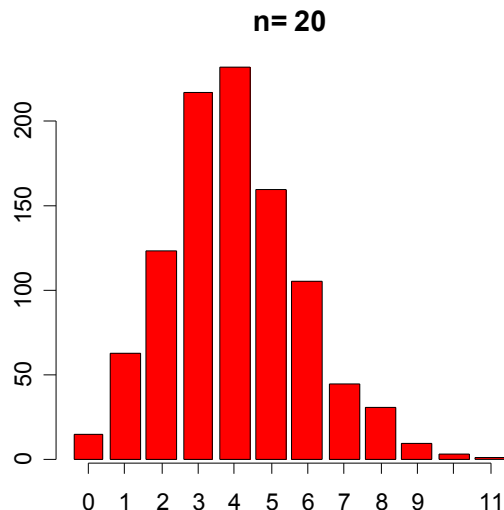
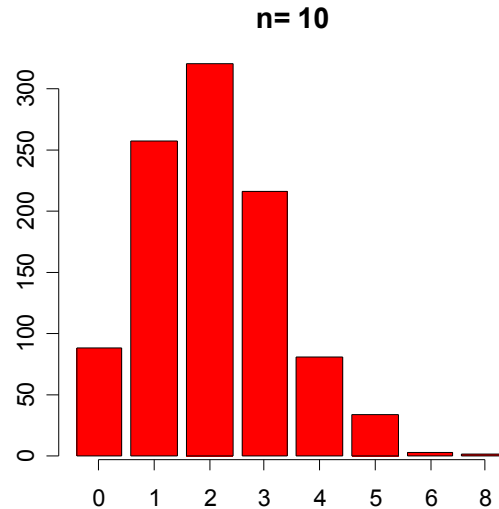
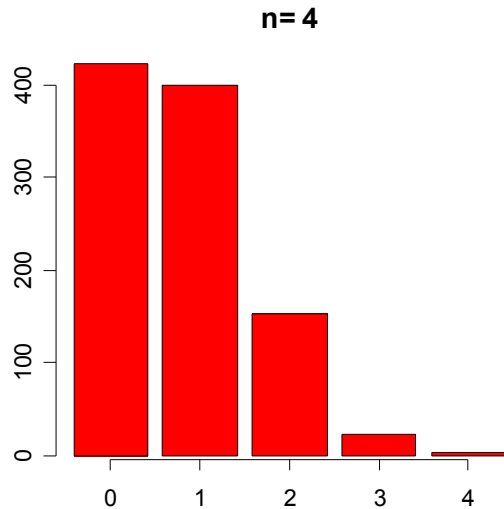
# 確率変数と確率分布

- 一般に, とりうる値の集合  $x=(x_1, x_2, x_3, \dots)$  と, それぞれの値が実現する確率  $p=(p_1, p_2, p_3, \dots)$  が与えられていて, 事象として  $x$  のうちどれか1つの値のみ実現するとき,  $(x, p)$  という1セットを, 「確率変数」と呼んで,  $X$  で表す。
- 期待値は  $E(X)=\mu=\sum x_i p_i$
- 分散は  $V(X)=\sigma^2=\sum (x_i - \mu)^2 p_i$
- 分散の平方根  $\sigma$  を標準偏差と呼ぶ。
- 横軸に  $x$  の各々の値を示す位置に,  $p$  の各々の可能性を示す高さの棒を立ててみれば, これが確率変数の「確率分布」ということになる。

# ベルヌーイ試行と2項分布

- 1回の実験で S か F かのどちらかが起こり, しかもそれらが起こる可能性が,  $\Pr(S)=p$ ,  $\Pr(F)=1-p=q$  で何回実験しても変わらないとき, これを「ベルヌーイ試行」という。
- ベルヌーイ試行を  $n$  回行って, S がちょうど  $k$  回起こる確率は,  $\Pr(X=k)={}_n C_k p^k q^{n-k}$
- ${}_n C_k$  は2項係数と呼ばれる。このような確率変数  $X$  は, 「2項分布に従う」といい,  $B(n,p)$  と表す。  $E(X)=np$ ,  $V(X)=npq$  である。

# 二項分布のシミュレーション

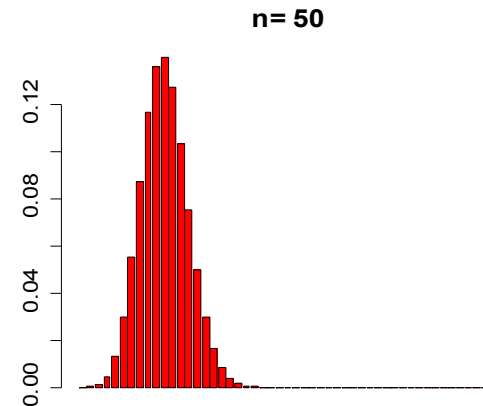
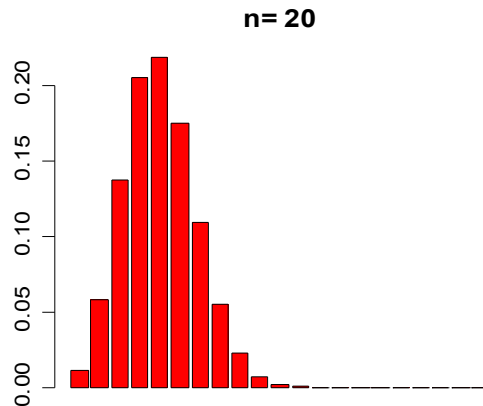
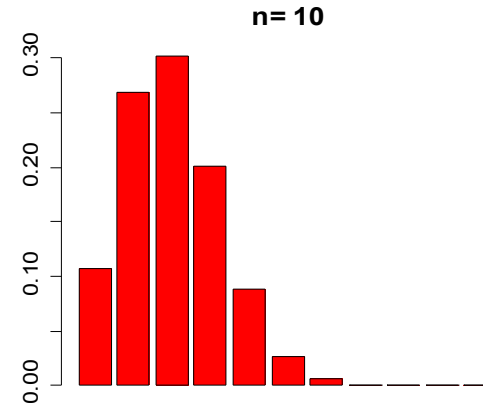
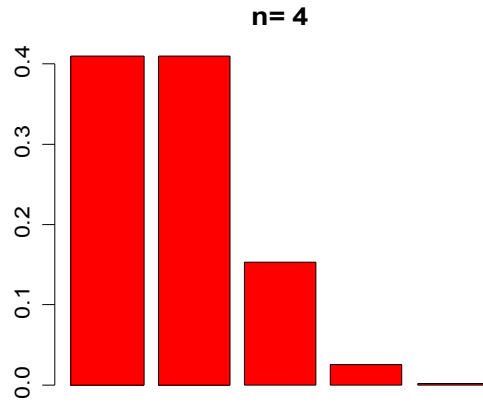


▼ 正二十面体(各面には1から20までの数字が割り振られている)サイコロをn回(n=4, 10, 20, 50)投げたときの、1から4までの目が出る回数を1試行と考えれば、これはベルヌーイ試行である。1回投げたときに1から4までの目が出る確率は0.2であるとして(=母比率を0.2とする)、左図は試行1000セットの度数分布



# 二項分布の理論値

各  $n$  についての理論的な確率分布は、 $\Pr(X=k) = {}_n C_k 0.2^k 0.8^{n-k}$  より下図のようになる。



# 正規分布

- $n$  が非常に大きい場合には, 2項分布  $B(n,p)$  の確率  $\Pr(X=np+d)$  という値が,  
 $1/\sqrt{2\pi npq} \cdot \exp(-d^2/(2npq))$  という値で近似できる。
- 一般にこの極限である,  
 $\Pr(X=x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$   
という形をもつ確率分布を正規分布と呼び,  
 $N(\mu, \sigma^2)$  と書く。
- $z=(x-\mu)/\sigma$  と置けば,  
 $\Pr(Z=z) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(-z^2/2)$   
となる。これを標準正規分布と呼び,  $N(0,1)$  と書く。
- 統計学でよく使われる確率分布であるカイ二乗分布とか  $t$  分布とか  $F$  分布は, 正規分布から導かれる。

# 練習問題

8頭で出走する競馬のレースがあり、「どの馬が勝つチャンスも等しい」と仮定した場合、ある特定の馬が勝つと予想して当たる確率は  $1/8$  となるが、2回のレースの少なくともどちらか一方に当たる確率はいくらか？

# 解答例

- 1回目に当たる事象と2回目に当たる事象は排反ではないから,  $1/8+1/8-1/64=15/64$
- 「1回目も2回目も当たらない」ことはない, という確率なので,  $1-(1-1/8)\cdot(1-1/8)=15/64$