問題

数列 $\langle a_n \rangle$ が,

$$a_a = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, ...$$

で与えられているとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

1 普通の回答

ルートを外に出していけば,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2^{1/2} \times 2^{1/4} \times 2^{1/8} \times ... = 2^{1/2+1/4+1/8+...}$$

ここで

$$X = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$$

とおいて両辺に 1/2 を掛ければ,

$$X \times 1/2 = 1/4 + 1/8 + ...$$

辺々引いて $(X - X \times 1/2) = 1/2$ を解けば $X = 1$（もちろん無限等比級数の公式でも解けるが）。最初の式に代入して,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2^1 = 2$$

2 一瞬でわかる回答

2 を掛けて平方根をとると同じ値になるので 2。