統計学第８回

「平均値に関する推定と検定」
＊前回まではカテゴリ変数を扱ったが，
今回からは量的変数を分析する。

中澤　港 **<minato@ypu.jp>**

http://phi.ypu.jp/statlib/l08-2003.sxi

母平均値と標本平均の差の検定

- 標本平均 E(X) と母平均値 μX に差がないという帰無仮説を検定
- 母分散 V(X) が既知ならば，(1) の z_0 が標準正規分布に従うことを利用して検定。
- 母分散が未知のとき，標本の不偏分散 S(X) を使って，(2) の t_0 が自由度 n-1 の t 分布に従うことを利用して検定。

$$z_0 = \frac{\left| E(X) - \mu X \right|}{\sqrt{V(X)/n}} \qquad (1)$$

$$t_0 = \frac{\left| E(X) - \mu X \right|}{\sqrt{S(X)/n}} \qquad (2)$$

標本平均から計算する母平均の **95 %**信頼区間

$$t_0 = \frac{\left| E(X) - \mu X \right|}{\sqrt{S(X)/n}} \qquad (2)$$

- 母平均は未知なので標本平均 E(X) で代用。
- 母分散 V(X) は未知なので標本の不偏分散 S(X) で代用。
- 自由度 n-1 の t 分布の上側 2.5 %の点（R では qt(0.975,n-1) ）を (2) の t_0 に代入して式変形すればいい。
- R では，標本データが X に付値されているなら，95 %信頼区間の下限が **mean(X)-qt(0.975,n-1)*sd(X)/sqrt(n)** 上限が **mean(X)+qt(0.975,n-1)*sd(X)/sqrt(n)** である。
- 不偏分散の平方根をサンプルサイズの平方根で割った値は標準誤差なので，データが正規分布に従うなら，母平均の 95 %信頼区間は [平均 ±1.96× 標準誤差] で得られる。

練習問題1

- 昭和 53 年の国民栄養調査によれば3歳男児の平均身長は 95.5cm であった。昭和 53 年にある保健所の3歳児健診に来所した 326 人の男児の平均身長が 96.3cm，不偏分散が 25.7 であったとき，全国平均と比べて発育に差があるか検定せよ（出典：豊川裕之，柳井晴夫「医学・保健学の例題による統計学」現代数学社，1982 ）

練習問題1の回答

- 母分散が未知なので，t0 を計算する。
abs(96.3-95.5)/sqrt(25.7/326)
を計算すると，**2.85** が得られる。
- 自由度 325 の t 分布の 2.85 に対する上側確率の2倍は，
2*(1-pt(2.85,325)) を計算すると
0.0046 となるので，有意水準5%で差がある。
- ちなみに，n が大きくなると t 分布は正規分布に近づくので，自由度 325 の t 分布の 97.5% 点は標準正規分布の 97.5% 点が約 1.96 だったことを思い出せば，2.85 はそれよりずっと大きいので，5% 水準で有意差があることは t0 の値だけ見てもわかる。
- R ではサンプルの生データが変数 x に付値されていれば **t.test(x,mu=** 母平均値 **)** で両側検定の結果がでる。

独立２標本の差の検定

- 標本調査によって得られた2つの量的変数Ｘと Ｙの分布の位置に差があるかどうかを調べる。
- ＸとＹの分布の形が正規分布に近ければ平均値の差のｔ検定。分布がひどく歪んでいるか仮定できないときはウィルコクソンの順位和検定（マン＝ホイットニーのＵ検定と数学的に同等。次回説明する）。
- 平均値の差の検定は，
(1) 母分散が等しく既知のＶであるとき
z0=|E(X)-E(Y)|/√(V/NX+V/NY) ～ N(0,1)
(2) 母分散が未知の場合は，まずＦ検定。

平均値の差の t 検定（続き）

- 母分散が等しいかどうかの F 検定は，2つの変数 X と Y の不偏分散の大きい方を小さい方で割った値 F0 を計算し（ X の方が不偏分散が大きければ SX/SY ），これが第1自由度 NX − 1，第2自由度 NY − 1 の F 分布に従うことを使って検定。
- 母分散が等しい場合（ F 検定で帰無仮説が棄却されない場合），母分散 S を
  S=|(NX − 1)SX+(NY − 1)SY|/(NX+NY − 2) として推定し，
  t0=|E(X) − E(Y)|/√(S/NX+S/NY)
  が自由度 NX+NY − 2 の t 分布に従うことを使って検定する。
- 分散が等しくない時，<u>平均値の差を検定する以前に分布が異なるという判断もありうる</u>が，普通は Welch の方法 (3) で φ を計算し，t0=|E(X) − E(Y)|/√(SX/NX+SY/NY) を自由度 φ の t 分布で検定。

$$\phi=\frac{(SX/NX+SY/NY)^2}{(SX/NX)^2/(NX-1)+(SY/NY)^2/(NY-1)} \quad (3)$$

例題（3）

- 「少子化の見通しに関する専門家調査」結果から，少子化に対するイメージが「明るい」または「どちらかといえば明るい」専門家（楽観主義）と「暗い」「どちらかといえば暗い」専門家（悲観主義）の間で2025年合計出生率の予測値に差があるか？
- イメージによらず予測値には差がないという帰無仮説を立て，それを検定する。母分散は不明なのでまずF検定を行い，等分散性は棄却されるのでWelchの方法で検定すると帰無仮説が棄却されないことがわかる。
- Rの式は，http://phi.ypu.jp/statlib/l8-1.R

例題（４）

- 同じ調査の出生率がそのうち回復するとみるか，低下し続けるとみるかという質問項目の答えの違いによって，2025 年の予測値が違うかを検討する。
- 回復するとみる人たちの 2025 年の合計出生率の予測値は，サンプル数 58，平均 1.487，不偏分散 0.0275，低下し続けるとみる人たちの予測値は，サンプル数 221，平均 1.356，不偏分散 0.0211 であった。
- 帰無仮説は「回復論者と低下論者で予測値に差がない」だが，対立仮説は「回復論者が低下論者より予測値が高い」と考えると片側検定すべき？

例題 (4) の解答

- `F0 <- 0.0275/0.0211` より `F0` は `1.301345`
- `1 － pf(F0,57,220)` より `0.0928` なので等分散。
- `S <- (57*0.0275+200*0.0211)/(57+220)` より `S` は `0.02241678`
- `t0 <- abs(1.487-1.356)/sqrt(S/58+S/221)` より `t0` は `5.95253`
- `1 － pt(t0,277)=3.979x10`$^{-9}$ `<< 0.05`
- よって，「差がない」という帰無仮説は棄却され，２群の平均値には有意水準５%で差があるといえる。
- `R` では，回復論者の生データが `X`，低下論者の生データが `Y` に付値されていれば，
  `var.test(X,Y)`
  `t.test(X,Y,var.equal=T,alternative=”greater”)`
  で，同じことができる（両側検定では `alternative=”two.sided”` が省略されている）。

両側検定と片側検定

- 帰無仮説が「差がない」である時，帰無仮説が棄却されるのは，「差がない」と仮定して得られる検定統計量（ z0 ， t0 など）が従うはずの分布上あまりにも外れた値をとる場合。
- 2群の平均値の差の検定では，どちらが大きい場合もありえるなら，「外れた値」が正に外れるか負に外れるかわからないので，両側検定を行う。つまり，帰無仮説が棄却される場合に想定する対立仮説として， μX>μY と μX<μY を両方考える。このときは，正規分布やｔ分布は左右対称なので，有意水準を5％にするなら右裾（上側）確率 2.5 ％の点と左裾（下側）確率 2.5 ％の点を考えればよい。
- 先験的知見から，どちらかの群が大きくなる可能性しか考えなくていいなら，対立仮説は μX>μY か μX<μY のどちらか一方だけになるので，「差がない」が否定される5％は，右裾確率5％か左裾確率5％のどちらかになる。これが片側検定。

対応のある2標本の平均値の差

- 同じ対象者についての2つの値の大小，例えば少子化の専門家調査結果ならば，2005 年予測値と 2025 年予測値の大小を比較したい場合は，比較するのが独立2標本ではなく，「同じ対象者の2つの値をペアとして，ペアごとに値の差を計算して，差の母平均が 0 と言えるか」を検定する方が検出力が高い。これを対応のある t 検定（ paired t-test ）という。
- 上の例で 2005 年予測値が X に，2025 年予測値が Y に付値されているなら，t.test(X-Y,mu=0) で検定できる。これは t.test(X,Y,paired=T) と同値。
- 差の 95% 信頼区間は，差の平均 D，差の不偏分散 VD，人数 N とすると，D±qt(0.975,N-1)*sqrt(VD/N)